

# Systemtheorie und Regelungstechnik

Überblick Formeln, basierend auf dem Skript von Prof. Diehl [1]

REGELUNGSNORMALFORM	1
ZEITINVARIANZ UND LINEARITÄT	1
LINEARISIERUNG	2
CHARAKTERISTISCHE POLYNOME	2
BIBO STABILITÄT	2
SPRUNGANTWORT	2
IMPULSANTWORT	3
ÜBERTRAGUNGSFUNKTION	3
WICHTIGE GLIEDER	3
GEKOPPELTE SYSTEME	4
NYQUIST DIAGRAMM	4
REGELUNGSSYSTEME	5
RÜCKFÜHRMATRIX LUENBERGER	6
BEOBACHTBARKEIT VON SYSTEMEN	6
LITERATUR	7

## Regelungsnormalform

Eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^n}{dt^n}y + a_{n-1}\frac{d^{(n-1)}}{dt^{n-1}}y + \dots + a_1\frac{d}{dt}y + a_0y = b_n\frac{d^n}{dt^n}u + \dots + b_1\frac{d}{dt}u + b_0u$$

kann in die Regelungsnormalform

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du$$

umgewandelt werden, mit den Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$D = [b_n]$$

## Zeitinvarianz und Linearität

Ein System ist zeitinvariant, sobald gilt:

$$y(t), u(t) = y(t + \Delta t), u(t + \Delta t)$$

Linearität ist gegeben, wenn für alle  $t \in [0, T]$  gilt:

$$\begin{aligned}x(t) &= \lambda x_1(t) + \mu x_2(t) \\u(t) &= \lambda u_1(t) + \mu u_2(t)\end{aligned}$$

## Linearisierung

Eine Systemgleichung der Form

$$f(x, u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

wird in der Ruhelage  $(x_{ss}, u_{ss})$  linearisiert mit

$$\delta \dot{x} = f(x_{ss} + \delta x, u_{ss} + \delta u) = \underbrace{f(x_{ss}, u_{ss})}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x} f(x_{ss}, u_{ss}) \delta x + \frac{\partial}{\partial u} f(x_{ss}, u_{ss}) \delta u$$

Es gilt:  $f(x_{ss}, u_{ss}) = 0$  da  $\dot{x} = 0$  für Ruhelage  $(x_{ss}, u_{ss})$ . Die Matrizen  $A, B$  sind gegeben durch:

$$A = \frac{\partial}{\partial x} f(x_{ss}, u_{ss}) \qquad B = \frac{\partial}{\partial u} f(x_{ss}, u_{ss})$$

## Charakteristische Polynome

Mit der gegebenen Regelungsnormalform kann das charakteristische Polynom aus den Eigenwerten der Matrix  $A$  berechnet werden:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_n)$$

Mit der  $n$ -dimensionalen Einheitsmatrix  $E_n$ . Wenn eine Differentialgleichung gegeben ist, kann das charakteristische Polynom mithilfe des Exponentialansatzes  $y(t) = e^{\lambda t}$  gefunden werden.

## BIBO Stabilität

Ein gegebenes LTI System ist BIBO-stabil, sobald eine der folgenden Bedingungen gegeben ist:

1. Die Realteile aller Polstellen sind negativ:  $Re(\lambda) < 0 \forall \lambda$
2. Falls eine Konstante  $K_{max} = const.$  existiert mit

$$K_{max} = \int_0^{\infty} |g(t)| dt$$

## Sprungantwort

Die (Zeit-)Serie eines LTI-Systems ist definiert als:

$$y(t) = C e^{At} x_0 + \int_0^t g(t - \tau) u(\tau) d\tau + Du(t)$$

mit der Gewichtsfunktion (Impulsantwort)  $g(t)$

$$g(t) = C e^{A(t-\tau)} B |_{t \geq 0}$$

Einfügen der Heavyside Funktion  $\sigma(t)$  ergibt:

$$h(t) = \int_{0+}^t g(\tau) d\tau + D$$

Da  $t \in (0; \infty)$  folgt, dass nicht von Null an integriert werden kann: " $0+$ " =  $0 + \varepsilon$  for  $\varepsilon \rightarrow 0$

## Impulsantwort

Die Gewichtsfunktion eines Systems ist gegeben durch

$$g(t) = \frac{d}{dt} h(t)$$

Wir erhalten für die Impulsantwort:

$$y(t) = \int_0^t u(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

## Übertragungsfunktion

Die Laplace-Transformation einer Funktion  $f(t)$  ist definiert als:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

Wir erhalten die Übertragungsfunktion aus einer Differentialgleichung über ihre Laplace-Transformierte:

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n}(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}}(t) + \dots + a_0 y(t) &= b_q \frac{d^q u}{dt^q}(t) + \dots + b_0 u(t) \\ &\quad \uparrow \\ s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) &= b_q s^q U(s) + \dots + b_0 U(s) \\ (s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) Y(s) &= (b_q s^q + \dots + b_0) U(s). \end{aligned}$$

Es folgt für die Übertragungsfunktion

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_q s^q + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}$$

Die Übertragungsfunktion erhalten wir auch durch die Integration der Impulsantwort:

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

Die Übertragungsfunktion kann auch aus der Regelungsnormalform berechnet werden:

$$G(s) = C(sE_n - A)^{-1}B + D$$

## Relativer Grad

Der Relative Grad einer Übertragungsfunktion ist definiert als die Differenz zwischen Grad des Nennerpolynoms und dem des Zählerpolynoms:

$$n - q \quad \text{für} \quad G(s) = \frac{b_q s^q + \dots + b_0}{a_n s^n + \dots + a_0}$$

## Wichtige Glieder

Und deren Differentialgleichungen

<b>Proportionalglied</b>	$y(t) = Ku(t)$
<b>Integrierglied</b>	$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$
<b>Differenzierglied</b>	$y(t) = K \frac{d}{dt} u(t)$
<b>Summierglied</b>	$y(t) = \pm u_1(t) \pm u_2(t)$
<b>Totzeitglied</b>	$y(t) = Ku(t - T_t)$
<b>PT1-Glied</b>	$T\dot{y}(t) + y(t) = Ku(t)$
<b>PT2-Glied</b>	$T^2\ddot{y}(t) + 2dT\dot{y}(t) = Ku(t)$

## Gekoppelte Systeme

### Reihenschaltung

$$G(s) = G_2(s)G_1(s)$$

### Parallelschaltung

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$

### Rückkopplungsschaltung

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

## Nyquist Diagramm

Ein Nyquist-Diagramm veranschaulicht die Amplituden- und Phasen-Information des Bode-Plots einer Übertragungsfunktion  $G(s)$  mit komplexen  $s = j\omega$  ( $\omega$  real) in einem einzelnen Diagramm. Aus den Informationen, die ein Bode-Plot liefert, kann ein Nyquist-Diagramm erstellt werden. Folgende YouTube-Playlist ist dabei hilfreich:

[youtube.com/watch?v=mglvOk9JGKY](https://www.youtube.com/watch?v=mglvOk9JGKY)

### Nyquist-Kriterium

Ist die offene Kette  $G_0(s)$  stabil, dann ist der geschlossene Kreis  $\frac{G_0(s)}{1+G_0(s)}$  genau dann stabil, wenn das Nyquist-Diagramm von  $G_0(s)$  die komplexe Zahl  $-1$  „links liegen lässt“, und diese nicht umrundet.

### Phasenreserve

Die Frequenz bei der die Amplitudenverstärkung  $|G_0(s)|$  des offenen Kreises den Wert 1 schneidet, heißt „Schnittfrequenz“  $\omega_s$ . Den Winkelabstand, den der Wert  $G_0(\omega_s)$  vom Punkt  $-1$  hat, nennen wir Phasenreserve:

$$\Phi_R = \arg(G_0(j\omega_s)) + \pi$$

## Amplitudenreserve

Die Frequenz, bei der das Nyquist-Diagramm die reelle Achse schneidet, sei  $\omega_{-180^\circ}$ . Die Amplitudenreserve sei definiert als der Faktor  $GM$ , mit dem man das Nyquist-Diagramm des offenen Kreises noch multiplizieren könnte, bevor der Punkt  $-1$  berührt wird:

$$GM = \frac{1}{|G_0(j\omega_{-180^\circ})|}$$

## Durchtrittsfrequenz

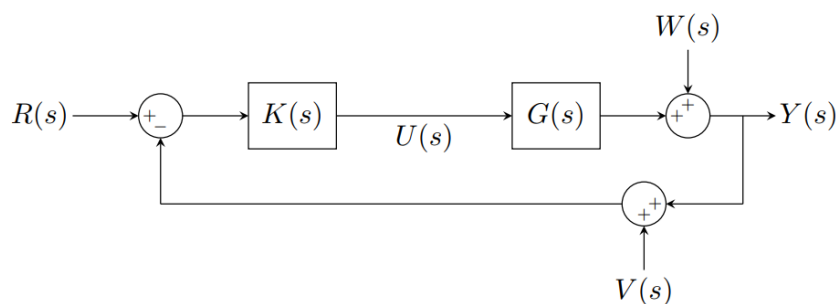
Die Durchtrittsfrequenz  $\omega_s$  ist definiert als:

$$|G_0(\omega_s)| = 1$$

Das ist die Frequenz, wenn die Amplitude  $0\text{dB}$  beträgt.

## Regelungssysteme

Regelungssysteme werden benutzt, um einen Regelkreis so zu steuern, dass er gewünschte Eigenschaften hat, wie zum Beispiel: Stabilität, Störkompensation, Robustheit und Sollwertfolge. Wir betrachten folgenden Standardregelkreis:



Hierbei beschreibt  $W(s)$  Störungen und  $V(s)$  Messrauschen. Der Regler ist durch die Übertragungsfunktion  $K(s)$  gegeben. Wir erhalten:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}}_{\text{Führungsverhalten}} R(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + G(s)K(s)}}_{\text{Störverhalten}} W(s) + \underbrace{\frac{-G(s)K(s)}{1 + G(s)K(s)}}_{\text{Messrauschempfindlichkeit}} V(s)$$

Verschiedene Korrekturglieder sind in folgender Abbildung dargestellt.

Regler bzw. Korrekturglied	Übertragungsfunktion	Bodediagramm
PD (ideal)	$k_p (T_D s + 1)$	
PI	$k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$	
PID	$k_p \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) (T_D s + 1)$ ( $T_D < T_I$ )	

## PID-Regler

Der PID-Regler besteht aus der Form:

$$K_{PID}(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

Die reellen Parameter  $K_P, K_I, K_D$  sind frei wählbar, sodass der Regler gewünschte Eigenschaften aufweist. Im Zeitbereich ergibt sich mit dem Fehlersignal  $e(t)$ :

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

## Ziegler-Nichols

Die kritische Periodendauer  $T_{kr}$  kann aus der Schwingung an der Stabilitätsgrenze abgelesen werden. Die Stabilitätsgrenze ist erreicht, wenn der geschlossene Kreis anfängt zu oszillieren. Der kritische Verstärkungsfaktor  $K_{kr}$  ist die Verstärkung, bei der der Kreis schwingt.

Typ		
P	$K_P = 0.5K_{kr}$	-
PI	$K_P = 0.45K_{kr}$ $T_I = 0.85T_{kr}$	$K_I = 0.53 \frac{K_{kr}}{T_{kr}}$
PID	$K_P = 0.6K_{kr}$ $T_I = 0.5T_{kr}$ $T_D = 0.12T_{kr}$	$K_I = 1.2 \frac{K_{kr}}{T_{kr}}$ $K_D = 0.072K_{kr}T_{kr}$

## Rückführmatrix Luenberger

Die generelle Differentialgleichung des Luenberger-Beobachters lautet:

$$\Delta x(t) = \hat{x}(t) - x(t)$$
$$\frac{d}{dt} \Delta x = A(\hat{x} - x) - LC(\hat{x} - x) = (A - LC)\Delta x$$

Die Luenberger Matrix  $L$  kann durch Polvorgabe bestimmt werden.

## Beobachtbarkeit von Systemen

Ein System ist beobachtbar, sobald für die Beobachtbarkeits-Matrix

$$\sigma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

gilt, dass

$$\det(\sigma) \neq 0$$

Ein System ist steuerbar, falls die Steuerbarkeitsmatrix  $S$  den vollen Rang  $n$  hat:

$$S = \begin{bmatrix} B \\ BA \\ BA^2 \\ \vdots \\ BA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Für SISO-Systeme ist das System auch dann steuerbar, wenn gilt:  $\det(S) \neq 0$ .

## Literatur

- [1] M.Diehl, „Skript zur Vorlesung Systemtheorie und Regelungstechnik 1 an der Universität Freiburg“, 12.04.2019